

Programação Linear [no Ensino Secundário]

Joaquim António P. Pinto
Aluno do Mestrado em Ensino da Matemática
Número mecanográfico: 030370027
Departamento de Matemática Pura da
Faculdade de Ciências da
Universidade do Porto
Disciplina: Métodos Matemáticos em Ciências
Docente: Professora Doutora Rosário Pinto

A matemática não se reduz a ciência isolada platonicamente de tudo o resto. É também um instrumento ao serviço do homem nos mais variados ramos da ciência e da técnica. O professor deve sempre ter presente este facto e tentar estabelecer, sempre que possível as conexões da matemática com outros domínios do pensamento, atendendo a que muitos dos seus alunos irão ser físicos, químicos, biólogos, geólogos, engenheiros, economistas, agrónomos ou médicos [9, Norma Geral número 8, pp. 12].

Sebastião e Silva

1 Introdução

A Programação Linear aparece no Programa de Matemática A do 11º Ano como conteúdo obrigatório, contrariamente ao que acontecia no Programa anterior, onde aparecia como conteúdo facultativo.

Pode ler-se no Programa [10]:

A Programação Linear vai permitir ao estudante aplicar na resolução de problemas de extrema simplicidade e utilidade (e que se apresentam hoje no domínio da Economia) conceitos aprendidos no 10º e ampliados no 11º.

Temos neste conteúdo, Programação Linear, uma excelente oportunidade para fazer um apelo aos Temas Transversais do Programa de Matemática A. Repare-se que com um só conteúdo podemos trabalhar todos os temas transversais: “Comunicação Matemática”; “Aplicações e Modelação Matemática”; “História da Matemática”; “Lógica e Raciocínio”; “Resolução de Problemas e Actividades Investigativas”; “Tecnologia e Matemática”.

Motivados pelas múltiplas conexões que se podem estabelecer vamos desenvolver um trabalho onde começamos por fazer uma breve introdução histórica, para de seguida trabalharmos os domínios planos, resolvendo geometricamente problemas de Programação Linear envolvendo duas variáveis, pois o seu tratamento é simples e preconizado no Programa de Matemática A.

Poderíamos também resolver geometricamente problemas de Programação Linear com três variáveis, no entanto não o faremos. Aproveitamos sim, para os resolver utilizando o Método Simplex e deste modo, trabalharmos o cálculo algébrico, podendo mesmo fazer algumas incursões por problemas mais complexos com os melhores alunos que possamos ter, ou mesmo com boas turmas, porque boas turmas também existem e então, nós professores, temos a obrigação de lhes abrir os horizontes para além do Programa.

2 Programação Linear

2.1 História

A Programação Linear é um ramo muito jovem da Matemática. Teve o seu início em 1947 quando G. B. Dantzig inventou e desenvolveu o “Método Simplex” para resolver problemas de optimização formulados a partir de questões de logística da Força Aéreas dos E.U.A., durante a segunda Guerra Mundial. Seguiu-se um período de rápido e grande desenvolvimento neste novo ramo da Matemática, pois até 1947 os problemas logísticos eram tradicionalmente resolvidos intuitivamente por tentativa e erro.

Os problemas de gestão organizacional começaram a ser resolvidos com grande eficiência pela Programação Linear, o que levou a que as grandes organizações comesçassem a dar importância ao trabalho dos matemáticos, olhando para estes com outros olhos.

O cálculo desenvolveu-se no Século XVII para resolver problemas de mecânica, a Programação Linear desenvolveu-se no Século XX para resolver problemas de logística. [1, pp. 8]

Uma contribuição decisiva para o desenvolvimento da Programação Linear veio das suas aplicações a problemas clássicos da Economia, destacando-se, nesta área, o nome de T. C. Koopmans.

Assim como Dantzig, também o Russo L. V. Kantorovich desenvolveu, em 1939, um algoritmo rudimentar para resolver alguns problemas particulares de Programação Linear; as suas descobertas só mais tarde vieram a ser tornadas públicas. [5, pp. XVI]

Kantorovich foi galardoado em Outubro de 1975, juntamente com T. C. Koopmans, com o prémio Nobel da Economia.

Infelizmente o trabalho de Dantzig não foi consagrado por ser considerado demasiado matemático.

Após a segunda Guerra Mundial os desenvolvimentos tecnológicos dos computadores e da Informática tornaram-se factores decisivos para a evolução acelerada da Programação Linear.

Os problemas clássicos de Programação Linear deixaram de ser os chamados problemas de “mistura” e passaram a ser outros; destacando-se o planeamento de chamadas telefónicas e de voos de aviões. É para resolver eficientemente o problema de chamadas telefónicas que o matemático Narendra Karmarkar, um investigador dos Laboratórios Bell da AT&T, desenvolve em 1984 um novo algoritmo que é muitas vezes mais rápido que o método simplex a encontrar o caminho mais curto ou, até mesmo, a fazer o planeamento horário mais eficiente. [2, pp. 152-154]

Pensamos que outros algoritmos se seguirão, pois à crescente complexidade dos dias de hoje a Matemática tem que responder, e responde, com simplicidade e eficiência...

2.2 Geometria

Sebastião e Silva [9, pp. 71] refere-se à Programação Linear, nos seguintes termos:

“(...) A programação, linear ou não linear, é um dos tipos de problemas que se apresentam hoje com maior frequência em INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL, no domínio da economia. A sua inclusão no ensino liceal, com carácter elementar, está a tornar-se cada vez mais imperiosa.”

Em seguida apresenta vários exemplos; estudemos um, “(...) de extrema simplicidade:

Suponhamos que um comerciante pretende adquirir uma quantidade, não superior a 5 toneladas, de certo produto que pode ser encomendado a duas fábricas A e B. A fábrica A garante ao comerciante um lucro de 4 contos por tonelada, mas não pode fornecer mais de 3 toneladas desse produto. A fábrica B garante

apenas um lucro de 3500 escudos por tonelada, mas pode fornecer toda a quantidade pretendida. Investigar a melhor maneira de o comerciante distribuir as encomendas pelas duas fábricas, de modo a obter o máximo lucro.

Neste caso vê-se logo que a solução óptima consistirá em encomendar 3 toneladas do produto à fábrica A e duas toneladas à fábrica B. Mas convém examinar outras soluções possíveis, a fim de encontrar a solução óptima por um processo que possa aplicar-se a outros casos menos triviais.

Seja x o número de toneladas do produto que o comerciante encomenda à fábrica A e y o número de toneladas que encomenda à fábrica B. Teremos em primeiro lugar as seguintes condições, chamadas *restrições* (ou condicionantes) do *programa*:

$$x + y \leq 5, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad y \geq 0 \quad (1)$$

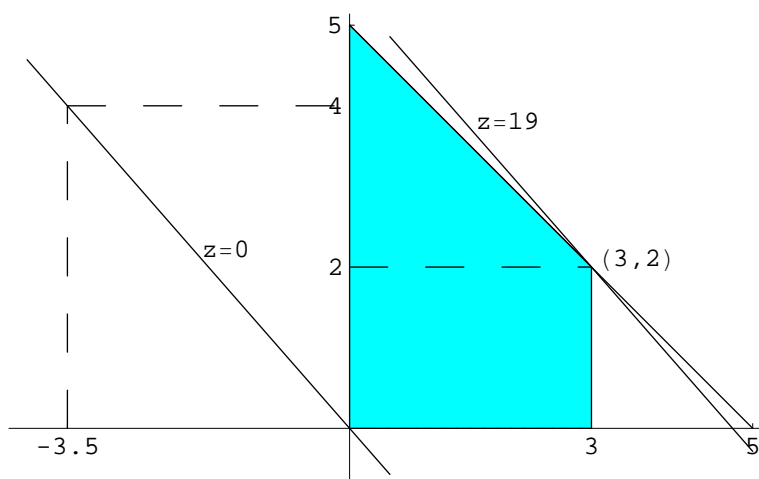


Figura 1: Conjunto das soluções possíveis

A conjunção destas três condições tem por gráfico o trapézio indicado na figura supra: será pois este o gráfico das *soluções possíveis*. Note-se que este conjunto é *convexo*.

Designando agora por z o lucro garantido ao comerciante, será

$$z = 4x + 3.5y$$

O que se pretende portanto é maximizar esta expressão, isto é, determinar os valores de x e de y que tornam máximo o valor da forma $4x + 3.5y$ (chamada objectivo do programa), de acordo com as restrições (1).

Começemos por construir a recta de nível $4x + 3.5y = 0$ da forma linear considerada, como vem indicado na figura; todas as outras rectas de nível da forma são paralelas a esta e o valor z da forma cresce de baixo para cima (ou da esquerda para a direita). Achar a solução óptima equivale pois a determinar a recta de nível de máxima ordenada na origem que encontra o gráfico das soluções possíveis (o trapézio indicado).

Este problema pode ser resolvido geometricamente ou analiticamente. Imediatamente se reconhece que a solução (x, y) procurada deve ser um dos vértices do trapézio, que são:

$$(0, 0) \quad , \quad (3, 0) \quad , \quad (3, 2) \quad , \quad (0, 5)$$

Os dois primeiros são desde logo eliminados. Para decidir, analiticamente, qual dos últimos é solução, basta ver quais são os valores que a forma objectivo toma em cada um desses pontos:

$$4 \times 3 + 3.5 \times 2 = 19$$

$$4 \times 3 + 0 \times 5 = 17.5$$

Como o maior valor é o primeiro, segue-se que a solução óptima é $x = 3$ e $y = 2$ (toneladas), sendo o máximo lucro possível 19 contos.

Vamos agora juntar uma nova restrição ao programa:

A fábrica A produz uma tonelada dessa mercadoria em cada 3 meses e a fábrica B produz uma tonelada em cada 2 meses, mas as fábricas não podem trabalhar simultaneamente por exigirem a presença de um mesmo técnico. Por outro lado, o comerciante não pode esperar mais de 12 meses.”

Deixamos ao cuidado do leitor a determinação da solução óptima para o programa com esta nova restrição.

Vejamos um outro exemplo, apresentado por Sebastião e Silva, análogo ao anterior:

“Um comerciante pretende obter um lucro não inferior a 28 contos com a venda de uma mercadoria que pode encomendar a duas fábricas A e B. A fábrica A garante um lucro de 4 contos por tonelada e pode produzir à razão de uma tonelada por quatro meses, mas não pode fornecer ao todo mais de 5 toneladas da mercadoria. A fábrica B garante um lucro de 3500 escudos por tonelada e pode produzir à razão de uma tonelada por três meses, mas não pode fornecer ao todo mais de 6 toneladas. Investigar a melhor maneira de fazer as encomendas, de modo a obter a mercadoria no mínimo prazo possível (em regime de trabalho não simultâneo).

(...)

Modifiquemos agora ligeiramente o enunciado do problema: Suponhamos que a fábrica A produz à razão de uma tonelada por quatro meses e a fábrica B à razão de uma tonelada por três meses e meio.”

Perguntamos nós: Quantas soluções óptimas existem agora?

“Os problemas de Programação Linear são apenas um caso particular dos problemas de máximos e mínimos condicionados para funções de mais de uma variável. Em programas de grandes empresas o número de variáveis é por vezes enorme, chegando mesmo a ser necessário resolver sistemas com mais de 100 incógnitas, o que seria impossível num prazo razoável, antes da era dos computadores electrónicos.” [9, pp. 71-76]

2.3 Problemas de Programação Linear

Problemas como os que acabámos de apresentar designam-se por *problemas de Programação Linear*.

Vejamos outros exemplos:

Exemplo 1

$$\begin{array}{rcll}
 \textit{maximizar} & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & \\
 \textit{sujeito a} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 11 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 8 \\
 & & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
 \end{array}$$

(“ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ ” uma abreviatura para “ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ ”) ou

Exemplo 2

$$\begin{array}{rcll}
 \textit{maximizar} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\
 \textit{sujeito a} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 5 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 7 \\
 & & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0.
 \end{array}$$

Em geral, se c_1, c_2, \dots, c_n são números reais, então a função f de variáveis reais x_1, x_2, \dots, x_n definida por

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j$$

é designada por *função linear*. Se f é uma função linear e se b é um número real, então a equação

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = b$$

é designada por *equação linear* e as inequações

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b$$

são designadas por *inequações lineares*. Equações lineares e inequações lineares são ambas referidas como *restrições lineares*. Finalmente, um *problema de Programação Linear* é um problema de maximizar (ou minimizar) uma função linear sujeita a um número finito de restrições lineares.

A função linear a ser maximizada ou minimizada num problema de Programação Linear é designada por *função objectivo* do problema. Por exemplo, a função z com variáveis x_1, x_2, x_3 definida por $z(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$ é a função objectivo do problema apresentado no exemplo 1. Os números x_1, x_2, \dots, x_n que satisfazem todas as restrições de um problema de Programação Linear dizemos que constituem a *solução admissível* do problema. Finalmente, a solução admissível que maximiza a função objectivo (ou que a minimiza, dependendo da forma do problema) é designada por uma *solução óptima*; os valores correspondentes da função objectivo são designados por *valores óptimos* do problema.

Nem sempre um problema de Programação Linear tem solução única; alguns problemas têm diferentes soluções óptimas e outros não têm solução óptima. Esta última situação pode ser provocada por uma de duas diferentes causas: ou não existe solução admissível ou existindo a solução é ilimitada, a função objectivo pode crescer, no caso da maximização, ou decrescer, no caso da minimização, indefinidamente. O primeiro caso pode ser ilustrado pelo seguinte problema:

$$\begin{array}{llll} \text{maximizar} & 3x_1 & - & x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 & + & x_2 \leq 2 \\ & -2x_1 & - & x_2 \leq -10 \\ & & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

que não tem soluções admissíveis; observe-se a figura 2.

O outro caso pode ser ilustrado pelo problema:

$$\begin{array}{llll} \text{maximizar} & x_1 & - & x_2 \\ \text{sujeito a} & -2x_1 & + & x_2 \leq -1 \\ & -x_1 & - & 2x_2 \leq -2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

que apesar de ter solução admissível, não tem solução ótima: para qualquer número M existe uma solução admissível x_1, x_2 tal que $x_1 - x_2 > M$. Neste caso existe uma abundância de soluções admissíveis que nenhuma aspira a ser a melhor, conforme pode ser observado na figura 3. Problemas com esta propriedade são designados por ilimitados. [1, pp. 7]

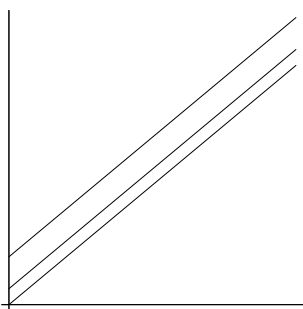


Figura 2: Problema impossível

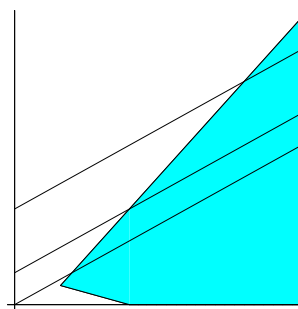


Figura 3: Solução não limitada

Prova-se que qualquer problema de Programação Linear pertence a uma de três categorias, a saber: tem solução ótima, não tem soluções admissíveis ou é ilimitado. [1, pp. 42]

Refira-se, por fim, que minimizar um problema é o mesmo que maximizar o seu simétrico, pelo que não nos preocupamos com exemplos, em especial, de um ou de outro tipo, uma vez que facilmente se pode converter um no outro; de igual modo, restrições com igualdades são equivalentes à conjunção de duas desigualdades (uma com maior ou igual e outra com menor ou igual) onde figuram os mesmos membros da igualdade dada.

2.4 O Método Simplex

Vamos introduzir o método simplex,¹ aplicando-o ao exemplo 1:

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximizar} & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
 \text{sujeito a} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\
 & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\
 & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{array} \tag{2}$$

O primeiro passo neste método consiste na introdução das chamadas *variáveis de folga*.

Para melhor percebermos este conceito, consideremos a primeira das nossas restrições,

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5. \tag{3}$$

Para qualquer solução admissível x_1, x_2, x_3 , o primeiro membro, de (3), é no máximo igual ao segundo membro; existe, frequentemente, uma folga entre os valores do primeiro e do segundo membro. Denotemos a folga por x_4 . Isto é, definimos $x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$; com esta nova notação, a inequação (3) pode agora ser escrita como $x_4 \geq 0$.

Analogamente as duas restrições seguintes fazem aparecer as variáveis x_5 e x_6 . Finalmente denotaremos a função objectivo $5x_1 + 4x_2 + 3x_3$ por z . Resumindo: para cada escolha de números x_1, x_2 e x_3 devemos definir números x_4, x_5, x_6 e z pelas fórmulas

$$\begin{array}{ll}
 x_4 & = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
 x_5 & = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
 x_6 & = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\
 z & = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3
 \end{array} \tag{4}$$

Com esta notação, o nosso problema pode ser redefinido como

$$\text{maximizar } z \text{ sujeito a } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \tag{5}$$

As novas variáveis x_4, x_5 , e x_6 definidas em (4) são chamadas *variáveis de folga*; as variáveis iniciais x_1, x_2 , e x_3 são, usualmente, designadas por *variáveis de decisão*. Note-se que as equações em (4) tornam evidente uma equivalência entre (2) e (5). Mais precisamente:

¹Este subcapítulo foi escrito baseado na introdução que Vašek Chvátal faz, ao método simplex, na sua obra *Linear Programming* [1, pp. 13-17].

- Qualquer solução admissível x_1, x_2, x_3 de (2) pode ser determinada por (4) e estendida de modo único, na solução admissível x_1, x_2, \dots, x_6 de (5).
- Qualquer solução admissível x_1, x_2, \dots, x_6 de (5) pode ser restringida à solução admissível x_1, x_2, x_3 de (2), simplesmente apagando as variáveis de folga.
- Esta correspondência entre soluções admissíveis de (2) e soluções admissíveis de (5) faz com que as soluções óptimas de (2) sejam soluções óptimas de (5) e vice-versa.

A estratégia do método simplex é a de procurar sucessivos melhoramentos: após encontrarmos uma solução admissível x_1, x_2, \dots, x_6 de (5), tentamos encontrar uma outra solução admissível $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_6$ que seja melhor no seguinte sentido $5\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2 + 3\bar{x}_3 > 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$. Repetindo este processo um número finito de vezes, devemos conseguir chegar a uma solução óptima.

Para começar com este plano necessitamos de uma solução admissível x_1, x_2, \dots, x_6 . Encontrar uma no nosso exemplo não é difícil: considerando as variáveis de decisão x_1, x_2, x_3 todas iguais a zero, obtemos os valores das variáveis de folga x_4, x_5, x_6 de (4). Assim a nossa solução inicial é

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 5, x_5 = 11, x_6 = 8 \quad (6)$$

que inclui $z = 0$.

No espírito da estratégia acima esboçada, devemos agora procurar uma solução admissível que nos conduza a um maior valor de z . Encontrar uma tal solução não é difícil. Por exemplo, se tomarmos $x_2 = x_3 = 0$ e aumentarmos x_1 , obtemos $z = 5x_1 > 0$. Assim, se considerarmos $x_2 = x_3 = 0$ e $x_1 = 1$, obtemos $z = 5$ (e $x_4 = 3, x_5 = 7$ e $x_6 = 5$). Melhor ainda, considerando $x_2 = x_3 = 0$ e $x_1 = 2$, virá $z = 10$ (e $x_4 = 1, x_5 = 3$ e $x_6 = 2$). Contudo, ao tomarmos $x_2 = x_3 = 0$ e $x_1 = 3$, obtemos $z = 15$ e $x_4 = x_5 = x_6 = -1$; o que não serve, já que a solução admissível requer $x_i \geq 0$ para todo o i . Assim não podemos aumentar x_1 demasiado. Coloca-se então a questão: até onde é que podemos aumentar x_1 (considerando $x_2 = x_3 = 0$ ao mesmo tempo) e mantendo a admissibilidade ($x_4, x_5, x_6 \geq 0$)?

A condição $x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \geq 0$ implica $x_1 \leq \frac{5}{2}$; do mesmo modo $x_5 \geq 0$ implica $x_1 \leq \frac{11}{4}$ e $x_6 \geq 0$ implica $x_1 \leq \frac{8}{3}$. Com estas três restrições, a primeira é a mais restrigente. Aumentando x_1 até ao seu maior valor possível obteremos a nossa próxima solução,

$$x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = \frac{1}{2} \quad (7)$$

Note-se que esta solução inclui $z = \frac{25}{2}$, o que constitui de facto uma melhoria em relação a $z = 0$.

De seguida procuramos uma solução admissível ainda melhor do que (7). Contudo a tarefa afigura-se um pouco mais difícil. O que torna a primeira iteração tão fácil? Temos ao nosso dispor não só a solução admissível (6), mas também o sistema de equações lineares (4), que nos guiam na procura de uma solução admissível melhorada. Se quisermos continuar por um caminho idêntico, devemos encontrar um novo sistema de equações lineares relacionadas com (7) tanto como o sistema (4) se relaciona com (6).

Que propriedades deve ter o novo sistema? Note-se que em (4) são expressas variáveis que assumem valores positivos em (6) em função das variáveis que, em (6), assumem o valor zero. Do mesmo modo, o novo sistema deve expressar as variáveis que assumem valores positivos em (7) em função das variáveis que, em (7), assumam o valor zero: isto é, o novo sistema deve expressar x_1 , x_5 e x_6 (bem como z) em função de x_2 , x_3 e x_4 . Em particular, a variável x_1 , que acabou de mudar o seu valor de zero para positivo deve passar do segundo membro para o primeiro membro do sistema de equações. De modo semelhante, a variável x_4 , que acabou de mudar o seu valor de positivo para zero deve passar do primeiro membro para o segundo membro.

Para construir o novo sistema devemos começar pelos recém-chegados ao primeiro membro, nomeadamente a variável x_1 . Obtemos x_1 em termos de x_2 , x_3 e x_4 a partir da primeira equação de (4):

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \quad (8)$$

Seguidamente, para expressar x_5 , x_6 e z em função de x_2 , x_3 e x_4 vamos simplesmente substituir o x_1 obtido em (8) nas correspondentes equações de (4).

$$\begin{aligned} x_5 &= 11 - 4 \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \right) - x_2 - 2x_3 \\ &\quad + 5x_2 + 2x_4, \\ x_6 &= 8 - 3 \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \right) - 4x_2 - 2x_3 \\ &\quad + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4, \\ z &= 5 \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \right) + 4x_2 + 3x_3 \\ &= \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4. \end{aligned}$$

Então o nosso novo sistema fica

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\
x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \\
x_6 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \\
z &= \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4.
\end{aligned} \tag{9}$$

Tal como fizemos na primeira iteração, devemos agora tentar aumentar o valor de z escolhendo o valor de uma variável apropriada do segundo membro enquanto ao mesmo tempo mantemos as restantes variáveis do segundo membro fixas em zero. Observe-se que o aumento dos valores de x_2 ou de x_4 levam a uma diminuição do valor de z o que vai contra as nossas pretensões. Portanto, não temos alternativa: a variável do segundo membro cujo valor tem de aumentar é necessariamente x_3 . Quanto pode aumentar? A resposta pode ser obtida directamente do sistema (9): com $x_2 = x_4 = 0$, a condição $x_1 \geq 0$ implica $x_3 \leq 5$; a condição $x_5 \geq 0$ não impõe nenhuma restrição, e a condição $x_6 \geq 0$ implica $x_3 \leq 1$. Logo, $x_3 = 1$ é o melhor que podemos fazer; a nossa nova solução é

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 1, \quad x_6 = 0 \tag{10}$$

(Observe-se que o valor de z só aumentou de 12.5 para 13.)

Averiguemos se esta solução melhorada é, ou não, suficientemente satisfatória para o nosso objectivo; procuremos, então, um sistema de equações lineares que acompanhe (10). Nesse sistema, as variáveis com valor positivo x_1 , x_2 e x_5 aparecem no primeiro membro, enquanto que as variáveis com valores nulos x_2 , x_4 e x_6 aparecerão no segundo membro. Para construir o sistema começamos novamente pela variável recém-chegada ao primeiro membro, nomeadamente, a variável x_3 . A partir da terceira equação de (9) temos $x_3 = 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6$; substituindo x_3 nas restantes equações de (9) obtemos

$$\begin{aligned}
x_3 &= 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6 \\
x_1 &= 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6 \\
x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \\
z &= 13 - 3x_2 - x_4 - x_6.
\end{aligned} \tag{11}$$

Agora é tempo de partir para a terceira iteração. Antes de tudo, no segundo membro de (11) temos que escolher a variável cujo aumento proporcione um aumento da função objectivo. No entanto, tal variável não existe:

de facto, se aumentarmos qualquer uma das variáveis do segundo membro x_2 , x_4 e x_6 provocaremos um decréscimo no valor de z . Logo, isto significa que chegámos a um impasse. De facto, só a presença deste impasse indica que acabámos; resolvemos o nosso problema; a solução descrita em (11). Porque? A resposta está na última linha de (11):

$$z = 13 - 3x_2 - x_4 - x_6 \quad (12)$$

A nossa última solução (10) preconizava $z = 13$; provar que esta solução é óptima é provar que qualquer solução admissível satisfaz a desigualdade $z \leq 13$. Como cada uma das soluções admissíveis x_1, x_2, \dots, x_6 , satisfaz entre outras, as desigualdades $x_2 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ e $x_6 \geq 0$, a desigualdade desejada $z \leq 13$ obtem-se directamente de (12).

3 Considerações Finais

Pretendemos com este trabalho estudar um recente ramo da Matemática, a Programação Linear aplicada ao Ensino Secundário.

Evidenciámos que o seu surgimento veio de necessidades concretas da “Sociedade Militar” e que o seu desenvolvimento actual e permanente é fruto de problemas colocados quer pela “Sociedade Civil” quer pela “Sociedade Militar”.

Foi nossa preocupação utilizar a Programação Linear no Ensino da Matemática, fazendo referência à multiplicidade de aplicações que esta tem, mas sobretudo utilizá-las para estudar conceitos matemáticos e ao mesmo tempo procurar atingir as finalidades da disciplina de Matemática no Ensino Secundário que são:

- *“Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real;*
- *Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade;*
- *Promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constituam suporte cognitivo e metodológico tanto para o prosseguimento de estudos como para a inserção na vida activa;*
- *Contribuir para uma atitude positiva face à Ciência;*
- *Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade;*
- *Contribuir para o desenvolvimento da existência de uma consciência crítica e interventiva em áreas como o ambiente, a saúde e a economia entre outras, formando para uma cidadania activa e participativa.”* [10]

Após a realização deste trabalho, ainda mais convencidos estamos das potencialidades que a Programação Linear traz ao Programa de Matemática A. Repare-se que com uma *aplicação* concreta (da economia, ou de outra qualquer área) podemos usar a *modelação matemática* para *resolver problemas* com *actividades investigativas* não prescindindo da *lógica e raciocínio matemático* usando a *tecnologia* para *comunicar matematicamente* as conclusões obtidas, devidamente enquadradas de um ponto de vista *histórico*. Isto é, como referimos na introdução, um só conteúdo, a Programação Linear e todos os Temas Transversais abordados de uma só vez!

Referências

- [1] Chvátal, V., *Linear Programming*, New York: W. H. Freeman Company, 1983.
- [2] COMAP, (Eds.), *For All Practical Purposes – Mathematical Literacy In Today's World*, 5th Edition, New York: W. H. Freeman Company, 2000.
- [3] Clímaco, J. N., Antunes, C. H., Alves, M. J. G., *Programação Linear Multiobjectivo – Do modelo de programação clássico à consideração explícita de várias funções objetivo*, Coimbra: Imprensa da Universidade, 2003.
- [4] Paulos, J. A., *O Circo da Matemática – Para além do Inumerismo*, Lisboa: Publicações Europa-América, 1991.
- [5] Ramalhete, M., Guerreiro, J., Magalhães, A., *Programação Linear*, Volume I, Lisboa: McGraw-Hill, 1984.
- [6] Ramalhete, M., Guerreiro, J., Magalhães, A., *Programação Linear*, Volume II, Lisboa: McGraw-Hill, 1985.
- [7] Katz, Victor J., *A History of Mathematics. An Introduction*, 2nd ed., New York: Addison Wesley Longman, 1998.
- [8] Salkin, H. M. and Mathur, Kamlesh, *Foundations of Integer Programming*, New York: North – Holland, 1989.
- [9] Sebastiao e Silva, J., *Guia Para a Utilização do Compêndio de Matemática* (1^o Vol., Curso Complementar do Ensino Secundário, Lisboa: Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Investigação Científica, 1975.
- [10] Silva, J. C.(Cordenador), et al., *Matemática A – Programa do Ensino Secundário*, Lisboa: Departamento do Ensino Secundário do Ministério da Educação, 2001. (<http://www.mat-no-sec.org/programas.htm>).
- [11] Solodovnikov, A. S., *Systems of Linear Inequalities*, Moscow: Mir Publishers, 1979.

■ ■ ■

JOAQUIM ANTÓNIO PINTO
joaquimpinto@mail.prof2000.pt
Porto, 30 de Julho de 2004