Pierre J Ehrlich

Programação Linear e Decisão

FGV- EAESP

2004

Observação: O presente texto serve de apoio ao ensino de Programação Linear

Programação Linear e Decisão

Programação Linear (PL) se insere dentro dos métodos de Programação Matemática. Os métodos de Programação Matemática fornecem modelos, na sua maioria determinísticos, normativos (e otimizantes), visando problemas de decisão, bem estruturados, onde o grande desafio é a natureza combinatória das soluções. Eles são tradicionalmente apresentados em textos de Pesquisa Operacional.

Em um modelo de Programação Linear as relações matemáticas (equações) são todas lineares. A estrutura é padronizada e repetitiva, mesmo para os mais diversos problemas. Esta característica permitiu o desenvolvimento de programas de computador extremamente simples de uso e muito eficientes. A análise das soluções também é padronizada. Estas características tornam Programação Linear uma técnica extremamente útil e com grande número de aplicações.

O presente texto pretende enfatizar o processo da modelagem para a tomada de decisões, assim como os principais pontos necessários para a interpretação das saídas dos programas de computador.

Observação: como a maioria dos programas de computador são em inglês, sempre que julgarmos útil, explicitaremos os termos em inglês.

1 - Os Elementos

A natureza repetitiva de PL e a necessidade de estruturar um problema em "forma padrão" para sua solução, tornam a identificação dos elementos particularmente importantes.

a) A *variáveis de decisão* ou *atividades* X_j (geralmente não negativas)

b) Os *recursos escassos* ou *elementos restritivos* (ou RHS – "Right Hand Side") B_i

c) Os *coeficientes tecnológicos* ou utilização de recursos por unidade de atividade a_{ij}

d) As *equações das restrições*. Exemplos:

i) $a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 \leq B_1$
ii) $a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 \geq B_2$
iii) $a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 = B_3$

e) Os benefícios (ou prejuízos) unitários c_j a serem utilizados na função objetivo

f) O critério para selecionar a solução ótima, chamado de *Função Objetivo*, a ser *maximizada* ou a ser *minimizada*

$$Z = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3$$

g) Variáveis de *folga* (slack): como X_{f1} , ou de *excesso* (surplus): como X_{f2} , sempre não negativas, a serem adicionadas (ou subtraídas) às restrições, para alterar as desigualdades para igualdades. No caso das restrições do item (d), a terceira restrição já é uma igualdade e nada há para ser acrescentado; entretanto, para as duas primeiras:

i) $a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + X_{f1} = B_1$
ii) $a_{21} X_1 + a_{22} X2 + a_{23} X_3 - X_{f2} = B_2$

h) As unidades: A função objetivo tem sua unidade, freqüentemente resultado financeiro ($), cada termo da soma precisa ter a mesma unidade. As restrições podem ter cada uma unidade diferente: $, Horas, Toneladas, Homens-Hora, Unidades Produzidas, etc., mas cada um dos termos da soma precisa ser consistente com sua respectiva restrição.

2 - A Solução

A solução ótima (quando ela existe) sempre será um ponto de "*quina*" ou um *ponto extremo* do conjunto convexo definido pelas restrições[1]. De modo que a busca da solução ótima é um problema combinatório para encontrar a combinação de restrições que define o ponto ótimo. O método do simplex (e suas variantes) é o utilizado pela maioria dos programas de computador para a solução de problemas de PL. O programa LINDO[2] utiliza o simplex. Quanto ao Solver do Excel, se nas opções indicarmos que o problema é linear (o que é recomendável), ele utiliza o simplex caso contrário, um algoritmo de busca por gradiente, que não é o simplex. O Solver é menos amigável para usar e para interpretar seus resultados, mas está disponível para todos os usuários de Excel e ele pode resolver problemas não lineares (que não trataremos no presente texto). Por outro lado, o Solver é oferecido como ferramenta do Excel, o que traz facilidades oriundas do ambiente de planilha.

Para a definição de todo ponto extremo, ou "de quina", cada restrição contribui com uma atividade (não negativa) X_j ou com uma variável de folga (ou de excesso) X_f. Este conjunto de variáveis de decisão-atividades, de variáveis de folga e de excesso forma uma *base* ou uma solução (não obrigatoriamente ótima) de "quina"; estas variáveis que definem a base são chamadas de *variáveis básicas*; as outras são chamadas de variáveis *não-básicas*. Para que o ponto seja um ponto extremo (e só um ponto extremo nos interessa), as variáveis *não-básicas devem ser igualadas a zero*. A solução pode ser:

a) Ponto ótimo único (é a grande maioria dos casos)

b) Solução múltipla: quando dois ou mais pontos extremos adjacentes são igualmente ótimos (com o mesmo valor para a função objetivo). Neste caso todo o segmento (ou plano, ou hiperplano) que contém estes pontos (combinação linear dos pontos) também é ótimo.

c) Degenerada: quando uma variável básica é igual a zero. Soluções degeneradas são decorrências de uma estrutura particular do problema de PL.

[1] O presente apêndice objetiva tão somente abordar os processos de modelagem e de tomada de decisões. Tradicionalmente (e eu o recomendo), PL é inicialmente apresentada com apenas duas variáveis de decisão. Para esta situação extremamente simples, a solução e todas as análises podem ser feitas num gráfico. Tanto este procedimento pedagógico de apresentação inicial quanto a apresentação do simplex fogem do escopo do presente texto.
[2] Recomendo baixar a versão de demonstração em www.lindo.com

d) Não-Factível (Infeasible): quando não há ponto factível que satisfaça todas as restrições. Isto significa que o problema, do modo que foi formulado, não tem solução.

e) Ilimitado (Unbounded): quando o conjunto convexo que define os pontos factíveis é aberto na direção de otimização.

As saídas dos programas de computador listam o valor da função objetivo assim como o conjunto das atividades básicas e outro conjunto para as atividades não básicas. As atividades não básicas são zeradas (pois assim exige o ponto ótimo). Para as atividades básicas, os *custos reduzidos* são nulos, enquanto as não básicas apresentam custos reduzidos que representam a *piora* no objetivo que seria causada pela inclusão de cada unidade de uma variável não básica.

Uma saída de computador, para o ponto ótimo, com uma variável não básica com custo reduzido nulo, indica a existência de uma solução múltipla, já que esta variável não básica poderia ser posta na base (e tornar-se básica) sem alterar o valor da função objetivo.

3 - Análise de Sensibilidade ou de Pós-Otimização

A seção anterior tratou da leitura da solução ótima. A presente seção vai tratar da sua interpretação. *Sempre há* duas partes a serem analisadas: o *intervalo* de validade da análise (*range*) e o *valor*. Fora do intervalo, ocorre uma descontinuidade (pulando de um ponto extremo para outro) que, geralmente torna as análises impossíveis (seria necessário recalcular todo o problema). A análise de sensibilidade sempre se refere a variações de um elemento de cada vez (poderia ser feita para mais de um), mantendo os outros constantes, nos seus valores iniciais. Para pequenas variações (marginais), longe dos limites dos intervalos, os efeitos de diversas variações simultâneas podem ser adicionados.

a) Sensibilidade para o coeficiente do benefício (ou prejuízo) unitário na função objetivo.

A saída mostra o intervalo para o qual o *ponto ótimo permanece inalterado* (não se move). Se o coeficiente sendo analisado corresponder a uma atividade básica, o valor da função objetivo se alterará, mas o ponto ótimo continuará inalterado.

Ao se atingir o limite do intervalo, chega-se à condição para o ponto ótimo pular para o ponto vizinho. No valor preciso do limite, os dois pontos são igualmente ótimos (assim como suas combinações lineares). Muitos programas de computador indicam, para o limite, qual variável sai da base e qual variável entra na base (substituição), de modo a definir o novo ponto extremo ótimo.

Seja um caso de maximização da função objetivo Z. Se X_j for básica, diminuir c_j além do limite causaria a saída de X_j da base; por outro lado, um aumento de c_j além do limite, causaria um aumento em X_j (de qualquer modo, alterando o ponto ótimo) às custas de outra variável básica que deixa a base para liberar recursos para X_j. Os custos reduzidos (reduced costs) das variáveis não básicas, assim como os valores sombra (shadow prices) para as restrições ativas, se alteram quando o ponto ótimo muda.

Se X_j for não-básica, aumentar c_j além do limite torna-a básica às custas de outra variável que deixa a base. Neste caso os custos reduzidos se alteram nesta mudança.

b) Sensibilidade para um recurso (RHS), B_i de uma restrição.

Se a restrição for atuante, o que significa que sua folga ou excesso são nulos, a análise de sensibilidade corresponde a “escorregar” o ponto ótimo (ele se desloca) ao longo da variação do RHS. O ponto sempre se moverá e o valor da função objetivo se alterará. Entretanto, dentro dos limites, sempre serão as mesmas variáveis que formarão a base: não há mudança de base.

Se a restrição não for atuante, alterar o RHS dentro dos limites alterará a folga (ou o excesso), mas não a solução ótima. Fora do intervalo, a restrição passa a se tornar atuante.

A análise mais importante é a que se relaciona com o *valor sombra* (*shadow price*), ou *valor de oportunidade*, ou *valor marginal* do recurso RHS se não houver folga (restrição atuante). Todas estas denominações se referem à mesma coisa: *A mudança marginal no valor da função objetivo, devida a uma variação marginal no RHS*. O nome “valor sombra (shadow value)” é importante para distinguir de “valor de mercado (market value)”.

O impacto de uma variação na disponibilidade de um recurso RHS, no valor da função objetivo, pode ser alto, baixo ou até nulo (se houver folga), independentemente do valor de mercado deste recurso.

O valor sombra é freqüentemente chamado de *variável dual*.

c) É importante observar que, *sempre*:

(valor sombra)*(folga ou excesso) = 0
(valor da atividade)*(custo reduzido) = 0

d) Sensibilidade para os coeficientes a_{ij}

Esta análise é raramente disponível nas saídas de computador. Nós não a apresentaremos. De qualquer modo, exigiria o estudo da dualidade, que não faremos.

4 - As Questões mais Freqüentes em Análise de Pós-Otimização

a) Sugere-se uma alteração no benefício unitário c_j para uma variável básica X_j.

Verifique se o proposto ultrapassa os limites.

Em caso afirmativo, preveja que variável de decisão (atividade) entra na base e qual sai.

b) Sugere-se uma variação no benefício unitário c_j para uma variável não básica X_j.

Observe que esta atividade, na solução existente, está num nível nulo. Ela só se tornará básica se o aumento sugerido para o benefício unitário for maior que seu custo reduzido.

c) Uma variável não básica é imposta.

O impacto unitário (piora) sobre a função objetivo será o custo reduzido.

d) Sugere-se uma alteração na disponibilidade de um recurso RHS.

Verifica se *permanece* dentro dos limites.

Em caso afirmativo, use o valor sombra h_i para prever as mudanças no valor da função objetivo.

Em caso negativo geralmente, não temos elementos para responder.

e) Sugere-se a disponibilidade de recurso adicional RHS (geralmente de uma fonte externa) a um custo unitário.

Verifique se a proposta *mantém* o total dentro dos limites.

Em caso afirmativo, só aceite se o custo do recurso proposto for menor que o seu valor sombra $h_{i.}$

Em caso negativo, calcule o benefício total referente à parte que cai dentro do limite, sendo este benefício o produto do valor sombra pela parte dentro do limite. Se este benefício ultrapassar o custo total do recurso proposto, aceite; caso contrário rejeite.

f) Uma nova atividade X_k está sendo proposta, usando recursos a_{ik}, e trazendo um benefício unitário $c_{k.}$

Compute o custo de oportunidade de desviar recursos das outras atividades para esta nova que está sendo proposta. Para isto use os valores sombra dos recursos:

$\Sigma_i(a_{ik}*h_i)$

Somente aceite se o benefício unitário c_k da atividade proposta for maior que o custo de oportunidade.

5 - Os Problemas mais Freqüentes na Formulação de um Modelo de PL

a) Inclusão de Custos Fixos no Objetivo

Você pode incluir os custos fixos no seu resultado final, após ter encontrado a solução ótima. Lembre-se que um modelo de PL lida com problemas de decisão e que somente os elementos pertinentes para a decisão devem ser incluídos. Custos fixos podem ser muito importantes para uma contabilidade global. Neste caso, deixe-os de fora durante o processo de decisão e inclua-os no final.

b) Uma restrição afirma: “pode produzir 1800 unidades de X_1 ou 2700 de X_2, ou qualquer combinação dos dois, mantendo esta proporção no uso de recurso”.

Primeiro observe esta tal de proporção:

$$(X_1/1800) + (X_2/2700) \leq 1$$

Esta restrição *deve*, então, ser rescrita sob a forma:

$$1{,}5\ X_1 + X_2 \leq 2700$$

c) Uma restrição afirma: “A proporção de X_1 no total ($X_1 + X_2$) tem que ser de, pelo menos, 30%”.

Primeiro escreva: $X_1/(X_1 + X_2) \geq 0{,}3$

Esta restrição deve ser rescrita sem fração, como:

$$0{,}7\ X_1 - 0{,}3\ X_2 \geq 0 \quad \text{ou} \quad - 07\ X_1 + 0{,}3\ X_2 \leq 0$$

d) O problema explicita: ”O recurso B_1 se transforma em 30% de produto L, 50% de M, 10% de N e 10% de perdas; o recurso B_2 se transforma em 40% de L, 30% de M, 25% de N e 5% de perdas”. O *erro* mais comum é escrever:

$$B_1 = 0{,}3L + 0{,}5M + 0{,}1N + 0{,}1\text{perdas}$$
$$B_2 = 0{,}4L + 0{,}3M + 0{,}25N + 0{,}05\text{perdas}$$

A forma *correta* de transcrever os dados do problema é:

$$L = 0{,}3B_1 + 04B_2 \quad ; \quad M = 0{,}5B_1 + 0{,}3B_2 \quad ; \quad N = 0{,}1B_1 + 0{,}25B_2$$

e) O problema explicita: “Os produtos L e N são vendidos a um preço de P_l e P_n. Para produzi-los, ambos requerem os insumos A e B cujo custo unitário é C_a e C_b, entretanto eles são apenas disponíveis nas quantidades R_a e R_b.

Os processos de produção são 1 e 2. Processo 1 utiliza uma unidade de A e cinco unidades de B para produzir três de L e uma de N. Processo 2 utiliza duas unidades de A e três unidades de B para produzir duas de L e três de N.

A produção de L tem que ser, pelo menos, o dobro da de N”.

As variáveis de decisão mais fáceis são os níveis de atividades dos processos X_1 e X_2. O uso de recursos e as produções são apenas conseqüências, devido à rigidez dos processos.

As restrições de consumo de recursos:

A consumido: $X_1 + 2X_2 \leq R_a$

B consumido: $5X_1 + 3X_2 \leq R_b$

A produção é:

$$L = 3X_1 + 2X_2$$
$$N = X_1 + 3X_2$$

A restrição das proporções de produção:

$$L \geq 2N \quad ; \text{ ou } \quad (3X_1 + 2X_2) \geq 2(X_1 + X_2) \quad ; \text{ ou } \quad X_1 - 4X_2 \geq 0$$

A função objetivo:

$\text{Max } Z = P_lL + P_nN - C_aA - C_bB$ precisa ser rescrita como:

$$\text{Max } Z = (3P_l + P_n - C_a - 5C_b)X_1 + (2P_l + 3P_n - 2C_a - 3C_b)X_2$$

há outras formas de começar a estruturar o problema, usando quatro variáveis de decisão em vez de duas; como exemplo, A_1, A_2, B_1, B_2, sendo as quantidades de recursos alocados a cada um dos processos 1 e 2; ou então pelos produtos L_1, L_2, N_1, N_2. Após escrever todas as equações que amarram os produtos e os recursos aos processos, pode-se simplificar para apenas duas variáveis de decisão.

f) Após montar as equações para estruturar um problema de PL, nunca esqueça de verificar a consistência das dimensões (unidades) dos termos. Também não esqueça de colocar todas as equações numa forma que seria apropriada para entrar com um programa de computador.

A seguir apresentamos um exemplo seguido de exercícios propostos[3].

<u>Exemplo</u>: Fazenda, um problema de mistura

Numa fazenda com 250 alqueires úteis, a adubação requerida por alqueire é:

Nitrogênio (N) :	pelo menos 40 quilos
Acido Fosfórico (P) :	pelo menos 50 quilos
Potássio (K) :	pelo menos 60 quilos

[3] O último item do Capítulo 1 apresenta três exemplos de aplicações em Finanças

Cloro (Cl) : não mais que 72 quilos

O adubo é vendido em sacos de 25 quilos ou de 50 quilos, conforme a marca. As especificações são padronizadas de modo que um saco de marca M1, especificado como 4-6-8-8, contém 4% de Nitrogênio (N), 6% de Acido Fosfórico (P), 8% de Potássio (K) e 8% de Cloro (Cl).

O mercado propõe três marcas, M1, M2 e M3, com as seguintes especificações:

Marca	Código	Preço por Saco	Peso
M1	4-6-8-8	55	50 kg
M2	8-8-8-6	60	50 kg
M3	6-6-20-5	50	25 kg

Estruture a formulação[4] do problema, analise a solução obtida por meio do Solver de Excel e responda as perguntas que seguem.

a) Quantos sacos, de cada marca, comprar para toda a fazenda? Observe que o problema do arredondamento é contornado ao passar para 250 alqueires.

b) Quais as despesas totais com adubos? Refaça os cálculos para o número inteiro de sacos.

c) Quais os excessos de adubagem aplicados?

d) Quanto de Cloro resulta por alqueire e qual a diferença com o máximo permitido?

e) A marca M1, sendo produzida por um parente próximo, impõe-se comprá-la, em quantidades de, no mínimo 100 sacos. De que modo isto afeta as despesas totais?

f) Após algumas negociações com o parente próximo, obter-se-á um desconto de modo a não alterar o orçamento original. De quanto deve ser este desconto por saco?

Exemplo FAZENDA resolvido por Solver do Excel

Problema do Fazendeiro					
	M1	M2	M3		
Atividades	0	11.43	2.86	Min	
Objetivo	55	60	50	828.57	
		Restric			RHS
Nitrogenio	2	4	1.5	50	40
Acido Fos	3	4	1.5	50	50
Potássio	4	4	5	60	60
Cloro	4	3	1.25	37.86	72

Abaixo mostramos as impressões do Solver de Excel

Target Cell (Min)			
Cell	**Name**	**Original Value**	**Final Value**

[4] A formulação correta deste problema deveria respeitar o número inteiro de sacos e requer a utilização de Programação com Inteiros. É muito fácil estruturar a Programação com Inteiros utilizando Excel. O difícil é a interpretação dos resultados (além da simples resposta do ponto ótimo). Optamos pela Programação Linear que nos apresenta uma solução com um número fracionário de sacos por alqueire. Ao multiplicar esta solução por 250 para obter o resultado desejado para a fazenda toda, reduzimos o problema da solução não ser um número inteiro de sacos – mas não eliminamos o erro.

$F$4	Objetivo Min	828.57	828.57
Adjustable Cells			
Cell	**Name**	**Original Value**	**Final Value**
$C$3	Atividades M1	0.00	0.00
$D$3	Atividades M2	11.43	11.43
$E$3	Atividades M3	2.86	2.86

Constraints					
Cell	**Name**	**Cell Value**	**Formula**	**Status**	**Slack**
$F$7	Nitrogenio Min	50	$F$7>=$G$7	Not Binding	10
$F$8	Acido Fos Min	50	$F$8>=$G$8	Binding	0
$F$9	Potássio Min	60	$F$9>=$G$9	Binding	0
$F$10	Cloro Min	37.86	$F$10<=$G$10	Not Binding	34.14

		Final	**Reduced**	**Objective**	**Allowable**	**Allowable**
Cell	**Name**	**Value**	**Cost**	**Coefficient**	**Increase**	**Decrease**
$C$3	Atividades M1	0	2.14	55	1E+30	2.14
$D$3	Atividades M2	11.43	0	60	3.33	20
$E$3	Atividades M3	2.86	0	50	7.50	27.5
		Final	**Shadow**	**Constraint**	**Allowable**	**Allowable**
Cell	**Name**	**Value**	**Price**	**R.H. Side**	**Increase**	**Decrease**
$F$7	Nitrogenio Min	50	0	40	10	1E+30
$F$8	Acido Fos Min	50	7.14	50	10	10
$F$9	Potássio Min	60	7.86	60	106.67	10
$F$10	Cloro Min	37.86	0	72	1E+30	34.14

	Target							
Cell	**Name**	**Value**						
$F$4	Objetivo Min	828.57						
	Adjustable			**Lower**	**Target**		**Upper**	**Target**
Cell	**Name**	**Value**		**Limit**	**Result**		**Limit**	**Result**
$C$3	Atividades M1	0		0	828.57		8.54	1298.04
$D$3	Atividades M2	11.43		11.43	828.57		22.81	1511.43
$E$3	Atividades M3	2.86		2.86	828.57		30.17	2194.29

As respostas são:

a) Nenhum saco de M1; 250*11,43 = 2857,5 sacos de M2; 250*2,86 = 715 sacos de M3.

b) $ 60*2858 + $ 50*715 = $ 207230 , o que é pouco mais que 250* $ 828,57 = $ 207142,5 devido ao arredondamento no número de sacos.

c) Escrevendo o número de sacos utilizados nas equações das restrições, ou analisando a saída do Solver (em Constraints), resulta um excesso de 10kg de Nitrogênio por alqueire.

d) Há uma folga de 37,86 kg de Cloro por alqueire, de modo que aplica-se 72 – 37,86 = 34,14 kg de Cloro

e) Aumentam de 100* $ 2,14 = $214 por alqueire ou $ 53500 para a fazenda toda.

f) O desconto é de $ 2,14 por saco de M1.

Observação: Diversas respostas podem ser obtidas por distintos caminhos.

6 – Exercícios

1 - Transporte

A empresa Precisa se posicionou para exportar seus instrumentos de precisão para quatro países da América do Sul, a partir das suas três fabricas. O transporte deverá ser efetuado de avião, utilizando os aeroportos de Viracopos e de Guarulhos.

As fabricas e suas capacidades máximas de produção diária são:
Sorocaba : 4000 unidades
Taubaté: 6000 unidades
Limeira: 3500 unidades

As demandas diárias são de:
Uruguai: 3000 unidades
Argentina: 4000 unidades
Paraguai: 2000 unidades
Chile: 2250 unidades

A capacidade máxima de processamento do aeroporto de Viracopos é de 4000 unidades por dia. Os aeroportos não podem estocar as mercadorias a serem expedidas.

Os custos unitários de transporte para os aeroportos, em $UM são:

	Guarulhos	Viracopos
Sorocaba	60	25
Taubaté	45	40
Limeira	55	20

Os custos do transporte aéreo depende de muitos fatores como distância, taxas, tipos de equipamentos e instalações, etc. Resulta:

	Uruguai	Argentina	Paraguai	Chile
Guarulhos	80	90	105	140
Viracopos	110	115	60	130

Formule o problema, identificando e definindo claramente os elementos:
a) Variáveis de decisão
b) Função objetivo

c) Restrições

2 - Repartição de Carga

A empresa de transporte de cargas aéreas Sobre as Nuvens (SN) opera entre São Paulo e Manaus.

O avião foi repartido em duas seções: uma pressurizada para cargas frágeis (tarifa de $UM 3000 por tonelada) e a seção comum, para mercadorias ordinárias (tarifa $UM 1000 por tonelada). há cargas de todos os tipos, sem limitação. Deseja-se compor o frete que maximize a receita em cada viagem. A configuração do avião impõe certas limitações:

A capacidade da seção pressurizada é de 6 toneladas, enquanto a seção comum pode carregar até 12 toneladas.

A carga total não pode ultrapassar 16 toneladas.

Para garantir a estabilidade da aeronave, a seção pressurizada não pode levar mais que duas toneladas a mais que a metade da carga comum.

a) Formule o problema de PL e encontre a solução ótima, por processo gráfico[5].

b) Mantendo a tarifa das mercadorias frágeis em $UM 3000, determine o intervalo de estabilidade do ponto ótimo encontrado, quando varia a tarifa das cargas ordinárias.

3 - Alltemp

A empresa Alltemp produz e vende três modelos de Refrigetroços: **Standard**, **Luxo** e **Elite**.

Uma unidade do modelo Standard é vendida por $11,75 e requer 1,5 minutos de fabricação e 4 minutos de montagem.

Uma unidade do modelo Luxo é vendida por $ 18,13 e requer 2 minutos de fabricação e 5 minutos de montagem.

Uma unidade do modelo Elite é vendida por $ 21,07 e requer 1 minuto de fabricação e 10 minutos de montagem.

Ao longo do horizonte de programação da produção (uma semana de cinco dias, oito horas por dia), a empresa pode expedir, seja 6000 unidades do modelo Standard, ou 4000 unidades do modelo Luxo, ou 6000 unidades do modelo Elite, ou qualquer combinação de dois ou três modelos.

Quatro pessoas se ocupam da fabricação e 16 pessoas trabalham na montagem. Cada pessoa trabalha 40 horas por semana.

Os custos variáveis da fabricação são de $ 2 por minuto e os de montagem são de $ 1 por minuto. Quanto aos custos variáveis de expedição, eles são de $ 1 para os modelos Standard e Elite e de $ 1,5 para o modelo Luxo (proporcional ao tempo de trabalho para a expedição).

O mercado total absorve toda a produção, mas há encomendas (mínimas) a serem satisfeitas, de 1000 unidades do modelo Luxo para o Mercosul e de 3000 unidades do modelo Elite para o mercado nacional

[5] O processo gráfico não foi apresentado no presente texto pois ele somente pode ser utilizado no caso muito particular de apenas duas variáveis de decisão.

Questões:

a) Formule o problema, montando todas as equações

b) Use as saídas de computador, para responder cada questão de forma independente.

i) Qual a solução ótima (plano de produção e contribuição global) ?

ii) Deve-se aumentar a capacidade da montagem em 10 horas, se isto custar $ 800?

iii) Na eventualidade de uma pane técnica que reduza a capacidade da montagem em 60 horas, qual seria o impacto sobre a presente contribuição global?

iv) Qual deve ser o preço unitário de venda do modelo Standard para tornar sua produção rentável?

v) Qual é a taxa de utilização do setor de fabricação?

vi) Como se altera a contribuição global se a encomenda mínima do mercado nacional, se alterar para 2990 unidades do modelo Elite ?

4 - Mangalarga

Um criador de cavalos Mangalarga, em conhecida fazenda de Ribeirão Preto, pensa em alimentá-los com uma mistura que ele mesmo elaborará a partir de: ração marca Z, ração marca Y, aveia enriquecida E, e aditivo D. O objetivo é garantir uma alimentação balanceada com um mínimo 3 unidades de nutriente A, 6 unidades de B e 4 unidades de C, a um custo mínimo. O total da mistura não deverá exceder 3 quilos.

A tabela abaixo mostra o total dos nutrientes em questão, por quilo de alimento.

Unidades de nutrientes por quilo de alimento

Nutrientes	Z	Y	E	D
A	1,6	1,4	0,4	0
B	2,0	2,5	3,0	6,0
C	0,2	0,3	1,2	4,0
Custo $ por quilo	0,5	0,6	1,0	6,0

a) Qual a mistura ótima e seu custo correspondente?
b) Um grupo de cavalos necessitaria de 0,5 unidades a mais de nutriente C, Como isto alteraria o custo?
c) Para outro grupo de cavalos, bastaria uma unidade a menos de nutriente B, Como isto alteraria o custo?
d) Um amigo está com estoques de sobra de ração Z. Em princípio ele está disposto a me vendê-la com um desconto de 20%. Devo comprar? Qual o desconto mínimo que devo negociar para me interessar?
e) O aditivo D está em falta e eu só posso compra-lo com um ágio de $ 1,50. Vale a pena? Como isto afeta meu custo total?
f) Estou recebendo uma oferta de uma super ração X que, por quilo, contém as seguintes unidades de nutrientes: 1,8 de A; 2,5 de B e 0,4 de C. Qual o preço máximo que eu pagaria por esta ração?

5 - Móveis Cupim

A fábrica de móveis Cupim produz cadeiras, bancos e mesas. A produção de uma cadeira exige 1,2 UT (unidade de tempo) de fabricação e 0,8 UT de acabamento. A produção de um banco requer somente 1,7 UT de fabricação. A produção de uma mesa requer 1,2 UT de fabricação e 2,3 UT de acabamento. A capacidade instalada é de 1000 UT de fabricação e de 1200 UT de acabamento. Os custos variáveis são de $ 0,9 por UT na fabricação e $ 0,8 por UT no acabamento.

O material requerido é 2 UM (unidade de material) por cadeira, 3 UM por banco e 4,5 UM por mesa, a um custo de $ 1,2 por UM. A disponibilidade de material é de 2000 UM.

Os preços de venda unitários são: $ 7,12 por cadeira; $ 8,13 por banco; e $13,32 por mesa.

Há uma encomenda (mínima) a ser satisfeita, de 386 cadeiras. O mercado pode absorver toda a produção.

a) Monte as equações para o problema do planejamento da produção.

b) Responda às perguntas, sendo uma independente da outra.

i) Qual o plano de produção e a contribuição (global) que resulta?

ii) Vale a pena comprar mais 500 UM a um custo majorado em $ 0,60 a UM ? Qual o resultado líquido sobre a contribuição global?

iii) Qual o impacto, sobre a contribuição global de uma encomenda mínima de 100 bancos?

iv) Qual o impacto de um desconto unitário de $ 0,50 no preço das cadeiras?

v) Para valer a pena produzi-lo, qual deve ser o preço mínimo de venda de um novo móvel que requer 1,8 UT de fabricação, 0,5 UT de acabamento e 1,3 UM de material ?

vi) Vale a pena bloquear 200 UT de fabricação para uma outra empresa que pagaria $ 300 para Cupim ?

6 - Instrumentos

Um pequeno fabricante de instrumentos de precisão emprega quatro montadores e dois engenheiros. Cada um deles trabalha 40 horas regulares semanais. O custo horário (salário mais todos os encargos) é de 20 $UM para cada montador e de 30 $UM para cada engenheiro. Os custos fixos da empresa são de 5000 $UM por semana. Os custos variáveis (manutenção e matéria prima) são de 5 $UM por hora por montador e de 10 $UM por hora por engenheiro.

A empresa vende (diretamente) instrumentos acabados e testados a 175 $UM a unidade e instrumentos semi-acabados (para um fabricante de grandes máquinas, nas quais se incorporarão os instrumentos) a 130 $UM a unidade. A demanda por qualquer um dos dois produtos, ultrapassa a capacidade da empresa.

A produção de instrumentos semi-acabados requer uma hora de montador e meia hora de engenheiro, por unidade. Um instrumento acabado requer uma hora e meia de montador e outro tanto de engenheiro.

a) Estruture o problema da produção, como Programação Linear, determine (por método gráfico, ou por simplex) o mix ótimo a produzir e o lucro resultante.

Cada um dos seis funcionários se dispõe a trabalhar mais dez horas extras por semana, a uma remuneração horária 50% maior (os outros custos não se alteram). Por outro lado, o fabricante de grandes máquinas (que compra os instrumentos semi-

13

acabados) impõe um contrato mínimo de 100 instrumentos semi-acabados por semana, mas aceitaria até 150 instrumentos.

b) Estruture o problema, visando maximizar o lucro, resolva-o utilizado um software de computador. Mostre as horas regulares e as horas extras programadas.

7 - <u>Duas Fábricas</u>

Uma empresa fábrica três produtos: A, B e C em duas Fábricas F1 e F2, que trabalham com diferentes tecnologias. Os três produtos são enviados para um deposito central, de onde são distribuídas para os revendedores.

As margens de contribuição sobre a produção(em K$UM), levando em conta os custos normais são:

	Fábrica F1	Fábrica F2
Produto A	29	31
Produto B	38	36
Produto C	47	46

Os custos unitários (em K$UM) de transporte para o depósito central são:

	Fábrica 1	Fábrica 2
Produto A	4	1
Produto B	3	9
Produto C	2	4

Cada fábrica é composta de três oficinas: para as oficinas de montagem e de controle, o uso de tempo, assim como o total de horas disponíveis, por mês são:

	Fábrica 1		Fábrica 2	
	Montagem	Controle	Montagem	Controle
Produto A	10	5	10	5
Produto B	7,5	2	10	10
Produto C	20	10	5	10
Disponível	2250	2000	2000	2000

A oficina de tratamento da fábrica 1 pode tratar de 100 unidades de A ou 400 de B ou 50 de C por mês. Para a fábrica 2, os valores são de 200 de A ou 100 de B ou 400 de C.

A demanda mensal para o produto A é de, no máximo 150 unidades; a de B de 200 unidades no máximo. Para o produto C há um contrato de fornecimento mínimo de 120 unidades mensais, sem limitação de máximo.

Questões:

a - Formalize o Problema

b- Qual a solução ótima e a contribuição total resultante?

c - Qual o impacto de um aumento de 10 unidades na demanda mínima para C?

d - Qual o impacto de uma redução de 20 unidades na demanda máxima para A?

e - Qual o impacto de problemas técnicos que causem uma diminuição de 1800 horas disponíveis na oficina de controle na fábrica 1?

f - O custo de tratamento do produto B, na fábrica 2 tinha sido subestimado em $KUM 3 por unidade. Qual o impacto sobre a contribuição total de uma correção deste valor original?

g - Um cliente propõe comprar 40 unidades adicionais de A, se lhe for concedido um desconto total de $KUM 278. Deve-se aceitar esta oferta?

8 - Programação da Produção

Uma empresa tem duas semanas para fabricar a encomenda de produtos A e B. Sendo os custos de armazenamento bastante elevados, a contribuição dos produtos fabricados na primeira semana resulta reduzida.

Analise a formulação e a saída por computador, onde:

As variáveis de decisão correspondem às fabricações de A e de B nas semanas 1 e 2.

As restrições são, pela ordem:

. Disponibilidade de mão de obra na primeira semana, em horas.

. Disponibilidade de mão de obra na segunda semana, em horas

. Disponibilidade de matéria prima para a primeira semana, em unidades.

. Disponibilidade de matéria prima para as duas semanas, em unidades.

. Encomenda mínima de A

. Encomenda mínima de B.

A unidade monetária é a tradicional $UM.

Questões:

a) Até quanto você pagaria de prêmio para um trabalhador disposto a transferir seu trabalho, de modo a trabalhar 10 horas a mais na primeira semana e 10 horas a menos na segunda semana?

b) Que aconteceria se a contribuição de "A na segunda semana" passar a 8 $UM?

c) O cliente que encomendou as 500 unidades de A, desejaria que as primeiras 10 unidades fossem entregues na primeira semana, para proceder a testes preliminares. Quanto isto lhe custará?

d) Observando a estrutura, muito simples, do problema, é possível prever o que aconteceria se a contribuição de "A na semana 2" cair abaixo de $UM 2,3750.

Explique o que aconteceria e justifique.

9 - Motores: Produtos Intermediários e Produtos Finais

A empresa MOTORS fabrica componentes para motores especiais (Pistões, Cilindros, Blocos de Motores de 4 cilindros e Blocos de Motores de 6 cilindros), assim como motores especiais totalmente montados e ajustados de 4 e de 6 cilindros, tanto para o mercado interno como para exportação. Ela tanto pode vender componentes, como motores especiais completos e acabados.

A produção de um pistão requer 2 kg de aço, 2 horas de fabricação e 3 horas de acabamento.

A produção de um cilindro requer 5 kg de aço, 3 horas de fabricação e 4 horas de acabamento.

A produção de um bloco de 4 cilindros requer 7 kg de aço, 4 horas de fabricação e 5 horas de acabamento.

A produção de um bloco de 6 cilindros requer 9 kg de aço, 6 horas de fabricação e 5 horas de fabricação.

A montagem de um motor de 4 cilindros requer o bloco apropriado, além de 4 pistões e de 4 cilindros.

A montagem de um motor de 6 cilindros requer o bloco apropriado, além de 6 pistões e de 6 cilindros.

Durante o período em consideração, a empresa poderá dispor de 1525 kg de aço, 1070 horas de fabricação e de 1500 horas de acabamento.

Os preços de venda de componentes são de $UM 82 para pistões, 115 para cilindros, 190 por bloco de 4 cilindros e 215 por bloco de 6 cilindros. Os preços de venda de motores são de $UM 1000 por motor de 4 cilindros e de $UM 1400 por motor de 6 cilindros.

Os custos variáveis de produção de componentes são:

$UM 70 para pistões
$UM 90 para cilindros
$UM 160 para blocos de 4 cilindros
$UM 180 por bloco de 6 cilindros

Os custos variáveis de montagem e de ajuste dos motores são:

$UM 100 para motores de 4 cilindros
$UM 140 para motores de 6 cilindros

A empresa MOTORS é obrigada a fornecer, ao longo do período, um mínimo de 20 motores de 4 cilindros e de 10 motores de 6 cilindros, montados e ajustados. Quanto ao máximo, não há limitação de mercado para nenhum dos seus produtos.

Questões:

a) Formule bem o problema, mostrando os cálculos dos coeficientes da função objetivo e a estrutura das restrições.

b) Liste os produtos finais vendidos no mercado, motores e componentes

No ponto ótimo, mostre a contribuição e calcule o faturamento bruto.

c) Quais as conseqüências de uma pane que reduza a capacidade da fabricação em 10 horas?

d) Qual o impacto na redução de 5 motores completos de 6 cilindros encomendados?

e) Seria vantajoso comprar aço no mercado de revendas? quanto e até que preço?